|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Zentralabitur 2025** | **Mathematik** | **Material für Prüflinge** |
| **Prüfungsteil B – Rechnertyp: GTR**  **Analysis** | **eA** | **Gymnasium Gesamtschule** |

Name: \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

### Aufgabe 1A

Gegeben ist die Schar der in definierten Funktionen   
mit und . Der Graph von   
wird mit bezeichnet.

Ohne Nachweis können Sie verwenden:

und

a) Zeigen Sie, dass und für jeden Wert von Stellen mit waagerechter Tangente von sind.  
**[3 BE]**

b) Der Hochpunkt von hat zu den beiden Tiefpunkten  
von denselben Abstand. Berechnen Sie diesen Abstand.  
**[4 BE]**

c) Betrachtet wird die Fläche, die , die Achse und die beiden Geraden mit den Gleichungen und einschließen. Sie setzt sich aus mehreren Flächenstücken zusammen.

Beurteilen Sie die folgende Aussage, ohne den Wert eines Integrals zu berechnen:

*Für jeden Wert von* *gibt der Term* *den Inhalt der betrachteten Fläche an.*  
**[4 BE]**

d Betrachtet wird nun die Fläche zwischen und der Achse im Intervall .

Untersuchen Sie, ob die folgende Aussage richtig ist:

*Für ist der Inhalt der Fläche kleiner als* .  
**[5 BE]**

Um Regenwasser zu speichern, wird es kontrolliert in ein unterirdisches Auffangbecken geleitet. Für ein bestimmtes Regenereignis wird die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken durch die in definierte Funktion mit für modellhaft beschrieben.

Dabei ist die Zeit in Stunden, die seit Beginn des Zuflusses  
in das Auffangbecken vergangen ist, und die momentane Zuflussrate in (Kubikmeter pro Stunde). Die Funktion   
ist die Funktion der Schar mit .

e) Bestimmen Sie die größte und die kleinste momentane Zuflussrate im betrachteten Zeitraum.  
**[4 BE]**

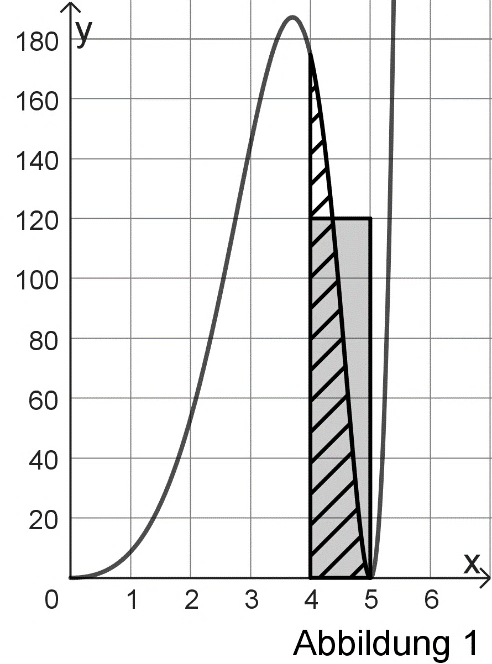
f) Im Intervall besitzt genau zwei Wendestellen und . Außerdem gilt und sowie und .

Beschreiben Sie die Bedeutung des Wertes , die sich aus diesen Informationen ergibt, im Sachzusammenhang.  
**[3 BE]**

g) Abbildung 1 zeigt den Graphen von mit einigen Eintragungen.

Erläutern Sie, dass mit diesen Eintragungen die folgende Aussage begründet werden kann:   
Interpretieren Sie diese Aussage im Sachzusammenhang.  
**[4 BE]**

**Hinweis:** Abbildung 1 folgt auf der nächsten Seite.



h) Zu Beginn des Zuflusses ist das Auffangbecken bereits mit Regenwasser gefüllt. Nach dreieinhalb Stunden wird eine Pumpe eingeschaltet. Diese pumpt bis zum Ende des betrachteten Zeitraums Wasser aus dem Auffangbecken mit einer konstanten Rate ab. Die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken wird dabei weiterhin durch beschrieben.

Geben Sie einen Term an, der das Wasservolumen im Auffangbecken zu einem beliebigen Zeitpunkt nach dem Einschalten der Pumpe in Kubikmetern beschreibt.  
**[3 BE]**

### Aufgabe 1B

Einige reetgedeckte Häuser haben Dachfenster in der Form einer sogenannten Fledermausgaube.

Abbildung 1 zeigt beispielhaft eine solche Fledermausgaube.

Abbildung 2 zeigt die obere Profillinie einer bestimmten Fledermausgaube, die durch die Funktion mit   
 und   
beschrieben wird.

Die -Achse stellt zwischen den Nullstellen und von   
den unteren Rand der Fledermausgaube dar. Alle Koordinaten haben die Einheit Meter .



a) Ein rechteckiges Fenster soll in die Fledermausgaube eingepasst werden.

Bestimmen Sie die maximale Höhe, die ein solches  
2 m breites Fenster haben kann.  
**[2 BE]**

b) Das Verhältnis von Breite zu Höhe soll bei Fledermausgauben zwischen und liegen.

Untersuchen Sie, ob die Vorgabe bei der betrachteten Fledermausgaube eingehalten wird.  
**[4 BE]**

c) Aus ästhetischen Gründen soll die maximale Steigung  
der Profillinie einer Fledermausgaube 30° betragen.

Weisen Sie nach, dass dies bei der betrachteten Fledermausgaube erfüllt ist.  
**[4 BE]**

d) Ein zweiteiliges Fenster soll so in die Fledermausgaube eingepasst werden, dass der obere Rand der zwei Fensterscheiben 10 cm unterhalb der oberen Profillinie und der untere Rand 10 cm oberhalb des unteren Randes der Fledermausgaube liegt. Außerdem wird ein 10 cm breiter Steg zwischen den beiden Fensterscheiben eingebaut. Abbildung 3 verdeutlicht die Situation.  
Berechnen Sie den Flächeninhalt der beiden Fensterscheiben.  
**[6 BE]**



e) Ein dreieckiges Fenster in Form eines gleichschenkligen Dreiecks soll so eingebaut werden, dass die Basis des Dreiecks durch den unteren Rand der Fledermausgaube beschrieben wird und das Fenster an seiner höchsten Stelle 0,9 m hoch ist.

Begründen Sie, dass das Fenster nicht über die gesamte Breite des unteren Randes der Fledermausgaube verlaufen kann.  
Bestimmen Sie den maximalen Flächeninhalt des Fensters.  
**[8 BE]**

Die obere Profillinie der betrachteten Fledermausgaube kann  
für auch durch eine Funktion modelliert werden.   
Die Modellierung der oberen Profillinie durch beide Funktionen und ist in Abbildung 4 dargestellt.



v

v

v

f) Gegeben ist die folgende Dokumentation einer Aufgabe:

I. , wobei gilt.

II. Für liefert die Lösungen   
 und und .

III. ; ;

IV. ; ;

Erläutern Sie die Schritte der Berechnung und geben Sie die Bedeutung von im Sachkontext an.  
**[6 BE]**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Zentralabitur 2025** | **Mathematik** | **Material für Prüflinge** |
| **Prüfungsteil B – Rechnertyp: GTR**  **Stochastik** | **eA** | **Gymnasium Gesamtschule** |

### Aufgabe 2A

Bei einer Naturkostkette besitzen die meisten Kundinnen  
und Kunden ein Konto für Online Bestellungen. Im Folgenden werden ausschließlich diese Personen betrachtet.

72 % der Personen sind jünger als 50 Jahre. 18 % der Personen sind jünger als 50 Jahre und wohnen nicht in einer Großstadt. Der Anteil der Personen, die in einer Großstadt wohnen, beträgt 75 %. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Personen die Anzahl derjenigen, die in einer Großstadt wohnen, binomialverteilt ist.

a) Stellen Sie den Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.  
**[3 BE]**

b) Beurteilen Sie die folgende Aussage:

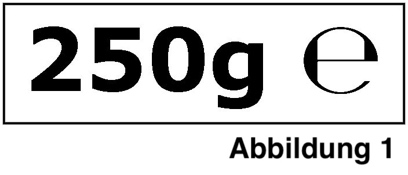
*Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person in einer Großstadt wohnt und nicht jünger als 50 Jahre ist, ist etwa halb so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person entweder in einer Großstadt wohnt oder nicht jünger als 50 Jahre ist.*

**[4 BE]**

c) Es werden 160 Personen zufällig ausgewählt.  
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als drei Viertel dieser Personen in einer Großstadt wohnen.  
**[2 BE]**

Eine Abfüllanlage der Naturkostkette füllt veganen Brotaufstrich in Gläser ab, auf denen als Füllmenge „250 g“ aufgedruckt ist. Die tatsächliche Füllmenge kann jedoch von der auf dem Glas aufgedruckten Füllmenge abweichen. Um festzulegen, welche Abweichungen der tatsächlichen von der aufgedruckten Füllmenge toleriert werden, wird die sogenannte Minusabweichung verwendet. Bei einer aufgedruckten Füllmenge von 250 Gramm beträgt die Minusabweichung  
4,5 Gramm.

Die Gläser können gemäß einer Richtlinie mit der in der Abbildung 1 dargestellten Füllmengenkennzeichnung versehen werden, wenn drei Bedingungen erfüllt sind. Diese können modellhaft wie folgt formuliert werden:



*Die tatsächliche Füllmenge der Gläser in Gramm wird als Zufallsgröße betrachtet.*

*Bedingung I: Der Erwartungswert der tatsächlichen   
 Füllmenge in Gramm liegt nicht unter der   
 aufgedruckten Füllmenge.*

*Bedingung II: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die   
 tatsächliche Füllmenge in Gramm von der   
 aufgedruckten Füllmenge um mindestens   
 eine Minusabweichung nach unten   
 abweicht, beträgt höchstens 6 %.*

*Bedingung III: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die   
 tatsächliche Füllmenge in Gramm von der   
 aufgedruckten Füllmenge um mindestens   
 zwei Minusabweichungen nach unten   
 abweicht, beträgt höchstens 0,2 %.*

d) Die tatsächliche Füllmenge der Gläser in Gramm ist normalverteilt mit der Dichtefunktion  
, wobei die tatsächliche Füllmenge eines Glases in Gramm beschreibt.

Untersuchen Sie, ob jede der drei Bedingungen erfüllt ist.  
**[5 BE]**

e) Eine weitere Produktion von Gläsern mit einer aufgedruckten Füllmenge von 250 Gramm stammt von einer anderen Abfüllanlage für vegane Brotaufstriche.  
Die tatsächliche Füllmenge in Gramm ist normalverteilt  
mit den Parametern und .

Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

*Wenn diese Produktion die Bedingung II erfüllt, dann erfüllt sie auch die Bedingung III.*

**[6 BE]**

### Aufgabe 2B

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 14 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich  
in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden.  
**[1 BE]**

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl.  
**[3 BE]**

Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt der Anteil mit 95 % etwas höher.

c) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.  
**[3 BE]**

d) Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte.

Beurteilen Sie die folgende Aussage:

*Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so  
groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst  
am Tag der Fahrt gebucht wurde.*

**[3 BE]**

Der Tourismusverband vermutet, dass der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen durch den Einsatz der Shuttlebusse nun 20 % beträgt. Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90 % einen Schätzwert für den Anteil der Radausflügler unter den Touristen zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 900 zufällig ausgewählten Touristen betrachtet. Die Abbildung zeigt die Graphen der folgenden  
für definierten Funktionen:



e) In der Stichprobe werden 153 Radausflügler gezählt.

Ermitteln Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit  
90 % und beurteilen Sie, ob die Vermutung des Tourismusverbandes mit dem Stichprobenergebnis verträglich ist.  
**[5 BE]**

f) Betrachtet wird eine Stichprobe vom Umfang mit einem Anteil sowie das zu diesem Anteil gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %. Betrachtet wird die folgende Aussage:

*Der Wert 0,17 liegt in der Mitte zwischen 0,14 und 0,20. Trotzdem ist es möglich, dass die Annahme   
mit dem Stichprobenergebnis nicht verträglich ist, die Annahme hingegen schon.*

Beurteilen Sie diese Aussage unter Verwendung der folgenden beiden Rechnungen:

I.

II.

**[5 BE]**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Zentralabitur 2025** | **Mathematik** | **Material für Prüflinge** |
| **Prüfungsteil B – Rechnertyp: GTR**  **Analytische Geometrie** | **eA** | **Gymnasium Gesamtschule** |

### Aufgabe 3A

Betrachtet werden die Punkte , ), , , , und mit   
.

Die Abbildung 1 zeigt einen zusammengesetzten Körper, der aus der Pyramide und einem Körper besteht.



a) Das Viereck ist ein Rechteck.

Untersuchen Sie, ob auch ein Quadrat ist.  
Berechnen Sie das Volumen der Pyramide .  
**[4 BE]**

b) Jeder Punkt liegt auf der Gerade (vgl. Abbildung 1).

Geben Sie den Ortsvektor eines Punkts auf an und zeigen Sie, dass ein Richtungsvektor von ist.  
**[2 BE]**

c) Begründen Sie, dass die -Ebene für keinen Wert von eine Symmetrieebene des zusammengesetzten Körpers ist.  
**[3 BE]**

d) Die Punkte und liegen in der Ebene .

Bestimmen Sie eine Gleichung von in Koordinatenform.

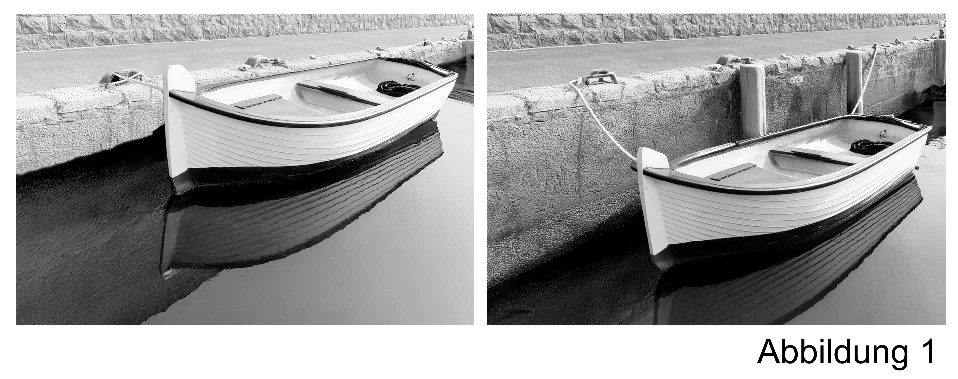
Ermitteln Sie den Wert von , für den der Eckpunkt ebenfalls in liegt.  
**[5 BE]**

e Im Dreieck wird der Innenwinkel im Punkt betrachtet.

Ermitteln Sie denjenigen Wert von , für den die Größe dieses Winkels maximal ist, und erläutern Sie Ihren Lösungsweg.  
**[6 BE]**

### Aufgabe 3B

In manchen Häfen ändert sich die Höhe des Wasserstandes z.  B. aufgrund von Gezeiten sehr stark. Dies muss beim Festmachen von Booten berücksichtigt werden.



Es werden zwei von mehreren Leinen betrachtet, mit denen  
ein Boot festgemacht ist. Dabei wird Punkt mit Punkt  und Punkt mit Punkt verbunden. Es gilt .

An einem bestimmten Tag stellt die Situation bei Niedrigwasser und bei Hochwasser dar. Abbildung 2 zeigt die Situation für . Zur Vereinfachung wird davon ausgegangen, dass sich das Boot bei verändertem Wasserstand nur auf und ab bewegt. Alle Angaben sind in Meter .

**Hinweis:** Abbildung 2 befindet sich auf der folgenden Seite.



a) Ergänzen Sie die Skalierung des Koordinatensystems in Abbildung 2.  
**[2 BE]**

Zum Festmachen muss bei jeder Leine eine zusätzliche Länge von 1,5 m berücksichtigt werden.

b) Es wird die notwendige Länge der Leinen bei Niedrigwasser betrachtet.

Bestimmen Sie, welche Länge die Leine bei Befestigung in den Punkten und mindestens haben muss.  
**[3 BE]**

Zwischen dem Boot und der Kaimauer befindet sich eine rechteckige Gangway, die in den Punkten und aufliegt. Die Ebene enthält die Punkte und .

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene   
in Koordinatenform. Zur Kontrolle  
**[4 BE]**

d) Das Bootsdeck wird durch die Ebene mit  
der Koordinatengleichung beschrieben.

Ermitteln Sie alle möglichen Winkelgrößen, unter denen  
die Gangway zwischen Hochwasser und Niedrigwasser  
auf das Bootsdeck auftrifft.  
**[5 BE]**

e) Auf der Kaimauer befindet sich ein weiterer Befestigungspunkt . Das Boot wird zusätzlich in den Punkten und festgemacht. Bei Niedrigwasser knickt die Leine dann an der Kante der Kaimauer ab.

Um die benötigte Mindestlänge der Leine zu bestimmen, wird folgender Ansatz notiert:

I.

II.

III.

Erläutern Sie die einzelnen Schritte mit Bezug zum Sachkontext und bestimmen Sie, wie lang die Leine mindestens sein muss.  
**[6 BE]**